

К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ПРОБЛЕМЫ

Для розрахунку поля в нелінійному середовищі запропоновано алгоритм покращення сходження засобу блочної ітерації, принцип, що використовує подібності магнітних систем, що можна використати і при рішенні інших нелінійних проблем.

TO THE DECISION OF ONE NONLINEAR PROBLEM

For account of a field in nonlinear environment algorithm of improvement of convergence of block iteration way, principle using similarity of magnetic systems is offered which can be used and at the decision of other nonlinear problems

Идея этой методики зародилась в связи с необходимостью решения некоторых проблем электродинамики, появляющихся при решении нелинейной проблемы.

Для определенности рассмотрим эту проблему на примере расчета стационарного магнитного поля (впрочем, этот чисто электродинамический пример ни в коей мере не умаляет преимущества предлагаемого алгоритма в сравнении с существующими, позволяющими решать системы нелинейных, в том числе дифференциальных, уравнений).

Расчет стационарного магнитного поля в нелинейном ферромагнетике сводится к решению краевой задачи для одной из систем дифференциальных уравнений [1].

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta} \\ \operatorname{div} \vec{H} = (\operatorname{grad} \mu^{-1}, \vec{B}) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \vec{B} = -\mu [\operatorname{grad} \mu^{-1}, \vec{B}] + \mu \vec{\delta} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

(Здесь $\vec{\delta}$ – плотность электрического тока, \vec{B}, \vec{H} – соответственно индукция и напряженность магнитного поля).

Эту задачу можно решать методом блочной итерации. Для произвольной функции $\mu(M)$ по найденному распределению поля (решению краевой задачи для одной из пар уравнений (1)) и кривой намагничивания $\mu(H)$ находят новое распределение μ . Это повторяется до тех пор, пока не совпадут с заданной точностью два очередных приближения для проницаемости [2, 3].

Можно утверждать, что процесс нахождения действительного распределения магнитной проницаемости расходится при $|\partial \mu / \partial H| > 1$ и сходится при $|\partial \mu / \partial H| \ll 1$ [4]. Причем, чем сильнее последнее неравенство, тем лучше сходимость.

Сходимость по μ можно улучшить, отыскивая поле в магнитоэлектростатической системе M^* , подобной системе M , если под M и M^* понимать такие геометрически подобные системы, поле одной из которых получается в результате простого пересчета поля в другой:

$$\vec{B}^*(Q^*) = a\vec{B}(Q) \quad (a=const) \quad (2)$$

(Здесь Q и Q^* - соответственные точки систем M и M^*).

Решение системы уравнений (1) проведем следующим образом. Разобьем область отыскания поля на ряд подобластей. Зададимся распределением $\mu(M)$, считая μ в каждой из подобластей постоянной величиной. Линию раздела подобластей вместе с границей области назовем контуром L .

Уравнения Максвелла для стационарного магнитного поля, эквивалентные уравнениям (1), которым поле удовлетворяет всюду вне L , сводятся к одному. Это можно сделать двумя способами.¹

$$\begin{cases} \vec{B} = \text{rot}\vec{A} \\ \text{rot}\mu^{-1}\text{rot}\vec{A} = \vec{\delta} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \vec{H} = \text{rot}\vec{v} = \text{rot}\mu^{-1}\vec{A} \\ \text{rotrot}\vec{v} = \text{rotrot}\mu^{-1}\vec{A} = \vec{\delta} \end{cases}$$

С учетом того факта, что в пределах каждой из подобластей $\mu = const$, а также $\vec{\delta} = \vec{k}\delta_z = \vec{k}\delta$, $\vec{A} = \vec{k}A_z = \vec{k}A$ (поле плоскопараллельное!), и полагая $\text{div}\vec{A} = 0$, окончательно получаем

$$\Delta A = -\mu\delta, \quad \Delta v = -\delta \quad (3)$$

Двум последним уравнениям магнитное поле удовлетворяет всюду вне линии L , на которой должны выполняться условия непрерывности касательной к ней составляющей напряженности \vec{H} и нормальной – индукции \vec{B} . Переписанные для потенциалов, эти условия принимают вид:

$$\frac{\partial A^+}{\partial \ell} = \frac{\partial A^-}{\partial \ell} \quad \text{или} \quad A^+ = A^- \quad \text{на } L, \quad \frac{\partial v^+}{\partial n} = \frac{\partial v^-}{\partial n} \quad \text{на } L \quad (4)$$

$$\frac{1}{\mu^+} \cdot \frac{\partial A^+}{\partial n} = \frac{1}{\mu^-} \cdot \frac{\partial A^-}{\partial n} \quad \text{на } L, \quad \mu^+ \frac{\partial v^+}{\partial \ell} = \mu^- \frac{\partial v^-}{\partial \ell} \quad \text{на } L \quad (5)$$

Здесь:

¹ Рассматривается случай двумерного поля, хотя само по себе это не имеет принципиального значения.

$A^+(Q)$ и $v^+(Q)$ для $Q \in D^+$, а $A^-(Q)$ и $v^-(Q)$ для $Q \in D^-$.

\vec{n} и $\vec{\ell}$ - направления, нормальное и касательное к L, причем нормаль \vec{n} направлена из области, отмеченной знаком "плюс" в область, отмеченную знаком "минус". Если векторы \vec{n} и $\vec{\ell}$ сориентированы как оси x и y декартовой системы координат, то (5) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\mu^+} \cdot \frac{\partial A^+}{\partial n} = \frac{1}{\mu^-} \cdot \frac{\partial A^-}{\partial n} \quad \text{на L,} \quad (6)$$

$$\mu^+ v^+ = \mu^- v^- \quad \text{на L} \quad (7)$$

То есть

$$\frac{\partial A^+}{\partial n} - \frac{\partial A^-}{\partial n} = H_\ell (\mu^+ - \mu^-) \quad \text{на L}$$

$$-v^+ + v^- = \frac{\mu^+ - \mu^-}{\mu^-} v^+ = \frac{\mu^+ - \mu^-}{\mu^+ \mu^-} A \quad \text{на L}$$

В случае, когда область, занятая источниками, конечна и $S \cap (L + D^+) = 0$, уравнениям (3) и последним условиям можно удовлетворить, если потенциалы отыскивать в виде:

$$A(P) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \mu(N) \delta(N) \ln \frac{1}{r_{NP}} dS_N + \frac{1}{2\pi} \oint_L (\mu^+(M) - \mu^-(M)) H_\ell(M) \ln \frac{1}{r_{PM}} dl_M \quad (8)$$

$$v(P) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \delta(N) \ln \frac{1}{r_{NP}} dS_N + \frac{1}{2\pi} \oint_L \frac{(\mu^+(M) - \mu^-(M))}{\mu^+(M) \mu^-(M)} A(M) \frac{\cos(P\vec{M}, \vec{n}_M)}{r_{PM}} dl_M \quad (9)$$

что справедливо в силу того, что первые слагаемые в (8) и (9) –объемные потенциалы и вследствие непрерывности потенциала простого слоя (ППС) в (8) и производной по нормали к L потенциала двойного слоя (ПДС) в (9) соответственно. Введением ППС и ПДС с плотностями $(\mu^+ - \mu^-) H_\ell$ и $A(\mu^+ - \mu^-) / \mu^+ / \mu^-$ учитывается наличие на контуре L фиктивных источников поля.

Продифференцировав (8) по нормали к контуру L и вычислив предельные к нему значения производной ($\lim(P \rightarrow L) \partial A / \partial n$) вначале для $P \in D^+ \rightarrow Q \in L$, а

затем для $P \in D^- \rightarrow Q \in L$, с учетом (6) получим интегральное уравнение (10) относительно $H_\ell(Q)$, решив которое, по (8) вычислим искомый потенциал $A(P)$. Аналогично, вычислив такие же предельные значения, но уже непосредственно для потенциала $v(P)$ из выражения (9), с учетом(7) получаем интегральное уравнение (11) относительно $A(Q \in L)$, решив которое по (9) вычислим потенциал $v(P)$.

$$H_\ell(Q) = -\frac{1}{\pi(\mu^+(Q) + \mu^-(Q))} \cdot \oint_L (\mu^+(M) - \mu^-(M)) H_\ell(M) \frac{\cos(Q\vec{M}, \vec{n}_P)}{r_{QM}} d\ell_M - \frac{1}{\pi(\mu^+(Q) + \mu^-(Q))} \iint_S \mu(N) \delta(N) \frac{\cos(Q\vec{N}, \vec{n}_Q)}{r_{QN}} dS_N \quad (10)$$

$$A(Q) = \frac{\mu^+(Q)\mu^-(Q)}{\pi(\mu^+(Q) + \mu^-(Q))} \cdot \oint_L \frac{\mu^+(M) - \mu^-(M)}{\mu^+(M)\mu^-(M)} A(M) \frac{\cos(Q\vec{M}, \vec{n}_P)}{r_{QM}} d\ell_M + \frac{\mu^+(Q)\mu^-(Q)}{\pi(\mu^+(Q) + \mu^-(Q))} \iint_S \delta(N) \ln \frac{1}{r_{QN}} dS_N \quad (11)$$

Геометрический смысл некоторых функций, входящих в (8) – (11), следует из рис. 1.

Итак, решив одно из интегральных уравнений ((10) или (11)) при известном распределении $\mu(M)$, по (8) или (9) вычисляем поле, а по нему и кривой намагничивания данного материала – новое распределение $\mu(M)$. И так до совпадения с заданной точностью двух последовательных приближений магнитной проницаемости.

Следует заметить, что хотя интегральные уравнения получены относительно фиктивных источников, эти источники являются "офизиченными", ибо в одном случае – это касательная к контуру составляющая напряженности магнитного поля H_ℓ , в другом же – непосредственно потенциал поля магнитной индукции A . Это обстоятельство позволяет переосмыслить известные методы решения подобных уравнений методом последовательных приближений и способы улучшения сходимости этих методов. Так, один из наиболее часто применяемых метод вычитания среднего значения [5] на каждом шаге итерационного

процесса при решении (10) есть ничто иное, как использование при решении дополнительной информации в виде закона полного тока [1].

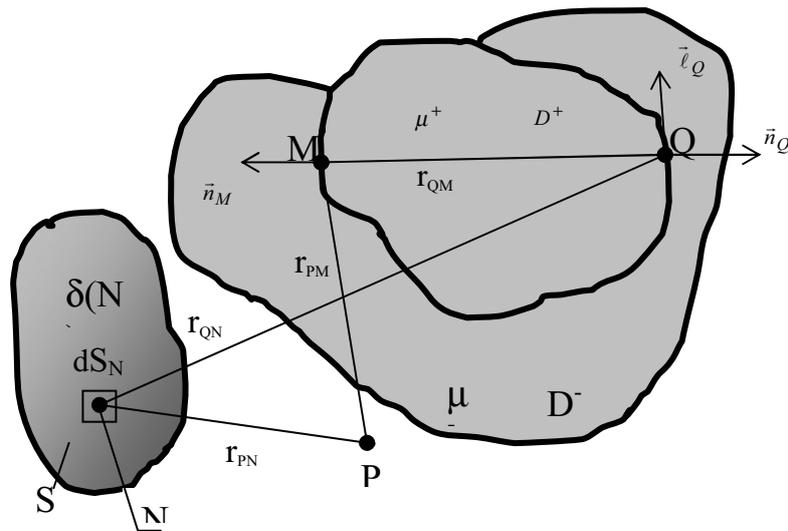


Рис. 1

Итак, первый блок проблем, как это показано выше, при известном распределении магнитной проницаемости можно решать методом интегральных уравнений. Впрочем, эта возможность не единственная. Например, не менее эффективным следовало бы назвать метод конечных элементов. Впрочем, любой из методов решения линейной проблемы обладает как преимуществами, так и недостатками.

Второй блок проблем – отыскание действительного распределения магнитной проницаемости $\mu(M)$ - самостоятельная проблема. Предлагается ее решать, используя возможность построения магнитной системы, подобной, как это было определено выше, исходной.

Итак, можно показать, что для подобия магнитных систем достаточно, чтобы $\bar{\delta}^* = a/b\bar{\delta}$, $\mu^*(H^*) = b\mu(H)$ ($b = \text{const}$, $b > 0$). В этом случае система M^* подобна M в смысле (2) и $\vec{H}^* = a/b\vec{H}$. В частности, если геометрически системы M и M^* совпадают ($a = b$, $\bar{\delta}^* = \bar{\delta}$), выбором коэффициента b можно добиться $|\partial\mu^*/\partial H^*| = b|\partial\mu/\partial H| \ll 1$ для всего диапазона изменения напряженности.

То есть, для улучшения сходимости по μ достаточно "сжать" функцию $\mu(H)$ одинаково для всех значений H . Чтобы поле напряженности не исказилось, необходимо магнитную проницаемость окружающего ферромагнетик пространства также изменить в b раз и коэффициент "сжатия" $b = a$ использовать при вычислении по (2) истинного распределения магнитного поля.

И в заключении следует отметить, что при наличии угловых точек в области отыскания поля использование интегрального уравнения (11) является более обоснованным, так как решение H_ℓ уравнения (10) в таких точках может быть неограниченным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шимони К., Теоретическая электротехника, М, "Мир", 1964.-266 с.
2. Петрушенко Е.И., К расчету статических магнитных полей в нелинейных средах методом интегральных уравнений, В сборнике "Теоретическая электротехника", вып.4, Львов, 1967
3. Колесников Э.В., Долгошеев А.Т., К расчету двумерного стационарного поля в нелинейном ферромагнетике, ИВУЗ, "Электромеханика", №6, 1975
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа, М, "Наука", 1972.-496 с.
5. Тозони О.В., Маергойз, Расчет трехмерных электромагнитных полей, Киев, "Техника", 1974.-298 с.

УДК 622.831.322

С.С. Андрейко

ФИЗИКО-ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ МЕХАНИЗМ ОБРАЗОВАНИЯ ОЧАГОВ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В СОЛЯНОМ ПОРОДНОМ МАССИВЕ СТАРОБИНСКОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ КАЛИЙНЫХ СОЛЕЙ

Представлено флюїодинамічну модель фізико-геологічного механізму утворення очагів газодинамічних явищ в соляному породному масиві. Механізм утворення очагів газодинамічних явищ розглядається як єдиний процес тектогенезу, міграції газонасичених водних розчинів, епігенетичних перетворень і акумуляції газів у соляному породному масиві.

PHYSICO-GEOLOGICAL MODEL REPRESENTING THE MECHANISM OF FORMATION OF THE GAS-DYNAMIC PHENOMENA CENTERS IN SALINE ROCK MASSIF THE STAROBISKOYE POTASH SALT DEPOSIT

The geodynamic model of the representing the physico-geological mechanism of formation of the gas-dynamic phenomena centers in a saline rock massif is presented. The mechanism of formation of the gas-dynamic phenomena centers is considered as united process of tectogenesis, migration of gas-saturated water solutions, epigenetic transformations and accumulation of gases in saline rock massif.

Большой фактический материал свидетельствует о приуроченности выбросов соли и газа к локальным геологическим нарушениям – мульдам, а обрушениям пород кровли, сопровождающихся газовыделениями, и отжимов призабойной части пород – к тектоническим трещинам [1-3]. Состав, морфология, структура и текстура пород в мульдах и тектонических трещинах, а также характер взаимоотношений мульд и трещин с вмещающими соляными породами, позволяют весьма логично сформулировать физико-геологический механизм образования очагов газодинамических явлений (ГДЯ) с позиций современной флюидогеодинамики, установив при этом источники агрессивных водных растворов, пути их миграции, источники свободных газов в очагах ГДЯ, механизм и результаты взаимодействия водных растворов с породами III калийного горизонта [4-6].

Исследования показали, что на стадии катагенеза в толще пород, подстилающей III калийный горизонт, существовали источники агрессивных водных растворов. Источниками агрессивных водных растворов были породы глинисто-мергелистых горизонтов соленосной толщи, из которых на стадии катагене-